Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023
BAREM DE CORECTARE, CLASA A VI-A

Subiectul 1. Fie numerele $A=2+2^2\cdot 3+2^3\cdot 3^2+\ldots+2^{101}\cdot 3^{100}$ și $B=3+2\cdot 3^2+2^2\cdot 3^3+\ldots+2^{100}\cdot 3^{101}$.
a) Demonstrați că numărul $A+B$ este divizibil cu 5.
b) Determinați restul împărțirii numărului A la 7.

Soluție: a) $A+B=(2+3)+\left(2^2\cdot 3+2\cdot 3^2\right)+\left(2^3\cdot 3^2+2^2\cdot 3^3\right)+\ldots+\left(2^{101}\cdot 3^{100}+2^{100}\cdot 3^{101}\right)$ **1p**

$A+B=5+2\cdot 3\cdot(2+3)+2^2\cdot 3^2\cdot(2+3)+\ldots+2^{100}\cdot 3^{100}\cdot(2+3)$ **1p**

$A+B=5\left(1+2\cdot 3+2^2\cdot 3^2+\ldots+2^{100}\cdot 3^{100}\right)$, deci $5\mid(A+B)$. **1p**

b) $A=2+\left(2^2\cdot 3+2^3\cdot 3^2\right)+\left(2^3\cdot 3^2+2^2\cdot 3^3\right)+\ldots+\left(2^{100}\cdot 3^{99}+2^{101}\cdot 3^{100}\right)$ **1p**

$A=2+2^2\cdot 3\cdot(1+2\cdot 3)+2^3\cdot 3^2\cdot(1+2\cdot 3)+\ldots+2^{100}\cdot 3^{99}\cdot(1+2\cdot 3)$ **1p**

$A=2+7\cdot\left(2^2\cdot 3+2^3\cdot 3^2+\ldots+2^{100}\cdot 3^{99}\right)$ **1p**

Din teorema împărțirii cu rest rezultă că restul împărțirii lui A la 7 este egal cu 2. .... **1p**

Subiectul 2. Fie $A=\left\{n\in\mathbb{N}\mid n^2+84 \text{ și } n^2+106 \text{ sunt numere prime}\right\}$ și $B=\left\{p\in\mathbb{N}\mid p \text{ este număr prim}\right\}$. Aflați numărul elementelor mulțimii $A\cap B$.

Relu Ciupea, Gazeta Matematică

Soluție: Fie $n\in A\cap B$. Avem $u\left(n^2\right)\in\{0,1,4,5,6,9\}$. **1p**

Deoarece $u\left(n^2+84\right)\in\{4,5,8,9,0,3\}$, iar n^2+84 este prim, rezultă că $u\left(n^2+84\right)\in\{9,3\}$ **1p**

așadar $u\left(n^2\right)\in\{5,9\}$, deci $u\left(n^2+106\right)\in\{1,5\}$ **1p**

Dacă $u\left(n^2+106\right)=5$, rezultă că $5\mid\left(n^2+106\right)$ și cum n^2+106 este prim, rezultă că $n^2+106=5$, fals. … **1p**

Așadar $u\left(n^2+106\right)=1$, de unde obținem că $u\left(n^2\right)=5$. **1p**

Cum $5\mid n^2$, iar 5 este prim, rezultă că $5\mid n$ și cum n este prim, obținem $n=5$. **1p**

Deoarece numerele $n^2+84=109$ și $n^2+106=131$ sunt prime, rezultă că $A\cap B=\{5\}$, așadar $A\cap B$ are un singur element. **1p**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 3. Notăm cu *A* mulțimea numerelor naturale *n* pentru care restul obținut prin împărțirea la 29 a produsului $31n$ este egal cu 15. Arătați că:

a) numerele 22 și 2023 sunt elemente ale mulțimii *A*;

b) mulțimea *A* conține cel puțin două pătrate perfecte.

Andrei Horvat-Marc

Soluție: a) $31\cdot 22=29\cdot 23+15$, deci $22\in A$ **1p**

$31\cdot 2023=31\cdot(29\cdot 69+22)=31\cdot 29\cdot 69+31\cdot 22$ **1p**

$=29\cdot(31\cdot 69+23)+15$, așadar $2023\in A$ **1p**

b) Fie $n\in A$ și $k\in\mathbb{N}$, astfel încât $31\cdot n=29\cdot k+15$. (1) **1p**

Din teorema împărțirii cu rest, există și sunt unice $a, r\in\mathbb{N}$, cu $0\le r\le 30$, astfel încât $k=31\cdot a+r$.

Obținem $31\cdot n=29\cdot 31\cdot a+29\cdot r+15$, deci $31\,|\,29r+15$ **1p**

Cum $31\,|\,2\cdot(29r+15)=58n+30$ și $31\,|\,(62r+31)-(58n+30)$, obținem $31\,|\,4r+1$.

Dar $4r+1\in\{1, 5, \dots, 121\}$, deci $4r+1\in\{31, 93\}$, și obținem $r=23$, așadar $k=31\cdot a+23$.

Înlocuind în (1), obținem $n=29\cdot a+22$, deci $A=\{29\cdot a+22\,|\,a\in\mathbb{N}\}$. **1p**

Cele mai mici pătrate perfecte din mulțimea *A* sunt 14^2 și 15^2. .... **1p**

Observație: Orice altă metodă corectă de obținere a două pătrate perfecte din mulțimea *A* – **inclusiv prin încercări, dar cu verificarea faptului că acestea fac parte din *A*** – se notează cu punctajul maxim.
Pentru scrierea și verificarea unei singure soluții se acordă 2 puncte.

Subiectul 4. Se consideră un unghi *AOB* cu măsura de $160°$. În interiorul său se construiesc semidreptele distincte $OA_1, OA_2, \dots, OA_{39}$, colorate cu albastru, care împart unghiul *AOB* în 40 de unghiuri congruente, și semidreptele distincte $OR_1, OR_2, \dots, OR_{31}$, colorate cu roșu, care împart unghiul *AOB* în 32 de unghiuri congruente. Aflați:

a) numărul semidreptelor roșii care se suprapun peste cele albastre;

b) numărul tripletelor de semidrepte consecutive din desen, astfel încât una dintre ele este bisectoarea unghiului format de celelalte două.

Soluție: a) Unghiurile consecutive formate de semidreptele albastre au câte $160:40=4°$, iar cele formate de semidreptele roșii au câte $160:32=5°$. **1p**

Deoarece $[4, 5]=20$, primele semidrepte care se suprapun sunt OA_5 și OR_4, iar $AOA_5=AOR_4=20°$ **1p**

Cum AOB se împarte în 8 unghiuri de $20°$, sunt 7 semidrepte roșii care se suprapun peste cele albastre **1p**

b) Unghiurile formate de semidreptele din interiorul unghiului AOA_5 au, în ordine de la *OA* spre OA_5, măsurile egale cu $4°, 1°, 3°, 2°, 2°, 3°, 1°, 4°$. Succesiunea precedentă se repetă în fiecare dintre cele 8 unghiuri de $20°$ în care este împărțit AOB **1p**

Primul triplet de semidrepte este (OA_2, OR_2, OA_3), căci $A_2OR_2=R_2OA_2=2°$. Sunt 8 astfel de triplete, câte unul în fiecare dintre unghiurile de $20°$ în care este împărțit AOB **1p**

În plus, $A_4OA_5=A_5OA_6=4°$, $A_9OA_{10}=A_{10}OA_{11}=4°$, $A_{14}OA_{15}=A_{15}OA_{16}=4°$, $A_{19}OA_{20}=A_{20}OA_{21}=4°$, $A_{24}OA_{25}=A_{25}OA_{26}=4°$, $A_{29}OA_{30}=A_{30}OA_{31}=4°$, $A_{34}OA_{35}=A_{35}OA_{36}=4°$ **1p**

În total sunt $8+7=15$ triplete. **1p**

COLEGIUL NAȚIONAL VASILE LUCACIU
Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro